



*Hinweis: Versuche die Aufgaben so gut wie möglich, schon vor dem Livestream zu lösen.
So wirst du dann, die dort vorgestellten Lösungen und Strategien noch besser verstehen können.*

Aufgabenblatt #4.3 – Zahlen gesucht

Primzahlen sind bereits seit der Antike bekannt. Schon die „alten Griechen“, z.B. Euklid und Eratosthenes, widmeten sich den Primzahlen und entdeckten zahlreiche spannende mathematische Eigenschaften rund um Primzahlen. Aber auch in neueren Jahren beschäftigten sich viele Mathematiker mit Primzahlen, darunter so berühmte Namen wie Euler, Fermat, Goldbach oder auch Gauss. Im Feld der Kryptologie, also der Wissenschaft vom Ver- und Entschlüsseln von Botschaften durch (mathematische) Regeln, bekamen Primzahlen im Verlauf der letzten knapp 100 Jahre eine immer wichtigere Bedeutung. Es begann eine regelrechte Jagd nach großen Primzahlen.

Lernziele:

- Fachbegriffe: Primzahlen, Quadratzahlen, Potenzen, Basis, Exponent
- Strategie „Sieb des Erathosthenes“
- Strategie: „Primfaktorzerlegung“

1. Zum Aufwärmen! Kreise die richtige Lösung ein.

- (1) Auf dem Markt haben wir Fingerpuppen für ein Puppenspiel gekauft. Es sind 8 Jungpuppen, davon 3 mit roten und 5 mit gelben Locken, sowie 9 Mädchenpuppen, davon 7 mit roten und 2 mit gelben Zöpfen.

Wie viele von den Puppen müsste ich – ohne hinzuschauen – aus der Tüte nehmen, um sicher zu sein, dass ich eine Jungpuppe und eine Mädchenpuppe mit gleicher Haarfarbe erwische?

- (A) 13 (B) 11 (C) 9 (D) 8 (E) 6

- (2) Nina und Leonie starten beim Berlin-Marathon beide mit einer dreistelligen Startnummer, ihre Schwester Jasmin mit einer vierstelligen. Ihr kleiner Bruder Benni entdeckt, dass in den drei Startnummern alle Ziffern von 0 bis 9 genau einmal vorkommen. Er multipliziert die Ziffern der Startnummern und erhält für Nina 0, für Leonie 90 und für Jasmin 72.

Wie groß ist die Summe der Ziffern von Ninas Startnummer?

- (A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 15



Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die genau zwei unterschiedliche Teiler hat:
Die Zahl 1 und sich selbst.

2. a) Begründe, dass die Zahl 1 keine Primzahl ist.
- b) Begründe, dass die Zahl 2 die einzige gerade Primzahl ist.

Um Primzahlen zu finden, kann man das folgende Verfahren durchführen, das sogenannte **Sieb des Eratosthenes**. Zuerst wird die Zahl 1 gestrichen. Die Zahl 2 wird umkreist und dann alle Vielfachen von ihr gestrichen. Dann wird die nach der 2 nächste nicht gestrichene Zahl, die 3, umkreist und alle Vielfachen von ihr gestrichen. Jetzt wird die nach der 3 nächste freie Zahl umkreist (die 5) und ihre Vielfachen gestrichen, usw. Den Anfang siehst du im folgenden Beispiel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

- c) Fertige eine Tabelle der Zahlen bis mindestens 100 an und führe das Schema vollständig durch – umkreist bleiben nur die Primzahlen übrig.
- d) „Wenn wir eine beliebige Zahl k wählen und dann $2^k - 1$ berechnen, so erhalten wir eine Primzahl.“

Für $k = 7$ gilt beispielsweise: $2^7 - 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 128 - 1 = 127$ und 127 ist eine Primzahl.

Ist diese Aussage tatsächlich für eine beliebige Zahl k richtig? Begründe.

- e) Berechne für $k = 1$ bis 5, fünf verschiedene Zahlen auf die folgende Art:
„Multipliziere die ersten k Primzahlen miteinander und addiere 1.“

Für $k = 3$ gilt beispielsweise: $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$

Betrachte deine Ergebnisse. Was fällt dir auf?

Überprüfe deine Beobachtung, ob diese auch für $k > 5$ gilt. Versuche zu erklären.

3. Welche der folgenden Aussagen treffen zu? Das Produkt $39 \cdot 65 \cdot 15$
 - a) ist gerade.
 - b) ist ungerade.
 - c) ist eine Quadratzahl.
 - d) ist durch 13 teilbar.

Versuche diese Aufgabe ohne Hilfsmittel zu lösen.



4. "Die etwas andere Aufgabe."

Auf einer Geraden g werden fünf Punkte A, B, C, D, E in dieser Reihenfolge angeordnet. Es gelten folgende Bedingungen:

- Die Strecke \overline{AE} hat die Länge 18 cm.
- Die Strecke \overline{CD} hat die Länge 5 cm.
- Die Strecke \overline{AB} ist 3cm länger als die Strecke \overline{CE} .
- Die Strecke \overline{AD} ist 2cm kürzer als die Strecke \overline{AE} .

Ermittle die Länge der Strecke \overline{BC} .

5. Community Aufgabe

Diese Aufgabe werden wir nicht im Livestream diskutieren, sondern später in den Kommentaren.

Anna, Bernd, Clemens, Daniel und Emilia haben auf der Klassenfahrt jede Menge Fotos gemacht. Nur ihre Klassenlehrerin weiß, wie viele Fotos jeder von ihnen gemacht hat. Geheimnisvoll erzählt sie: „Ich gebe euch sechs Hinweise, aber Vorsicht, genau eine meiner Aussagen ist falsch.“

- (1) Bernd hat weniger Fotos gemacht als Emilia.
- (2) Clemens hat weniger Fotos gemacht als Bernd.
- (3) Daniel hat weder die wenigsten noch die meisten Fotos gemacht.
- (4) Bernd hat die wenigsten oder die meisten Fotos gemacht.
- (5) Emilia hat weniger Fotos als Anna gemacht und mehr Fotos als Daniel.
- (6) Clemens hat mehr Fotos gemacht als Anna.

Weise nach, dass sich mithilfe dieser Angaben die Rangfolge der Schülerinnen und Schüler nach der Zahl ihrer gemachten Fotos eindeutig bestimmen lässt.

Gib diese Reihenfolge an. Beginne mit der kleinsten Anzahl.

Welche Aussage ist falsch? Begründe.

Quellen

- Aufgabe 1: Känguru Wettbewerb: 2015(C5) und 2015(C7)
<http://www.mathe-kaenguru.de>
- Aufgabe 2 (bearbeitet)
https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/imp/gym/bp2016/fb1/5_m1_mgk/
- Aufgabe 4 und 5: Mathematik-Olympiade: 530531 und 570634
<https://www.mathematik-olympiaden.de>