Name: ______________________________

Entdecken von Gesetzmäßigkeiten und Aufstellen von Vermutungen

Lernziele

- Erkennen und Beschreiben von Mustern durch Zahlenfolgen
- Finden von Bildungsgesetzen für Zahlenfolgen
- Figurierte Darstellung von Zahlenfolgen
- Erkennen und Anwenden der Gaußschen Summenformel
- Einige historische Fakten (Pythagoreer, Fibonacci)
- Lösen von Olympiadeaufgaben.

Übungsaufgaben

1) Ergänze die Zahlenfolge um jeweils drei weitere Glieder. Gib jeweils das n-te Glied mit Hilfe einer Formel an.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	...	a_n
a)	2	4	6	8	10				...	
b)	3	5	7	9	11				...	
c)	3	8	13	18	23				...	
d)	2	4	8	16	32				...	
e)	3	9	27	81	243				...	
f)	1	4	9	16	25				...	
g)	1	8	27	64	125				...	
h)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$				...	
i)	1000	999	997	993	985				...	

2) Berühmt und berüchtigt. Setze die Zahlenfolgen um jeweils drei weitere Glieder fort.

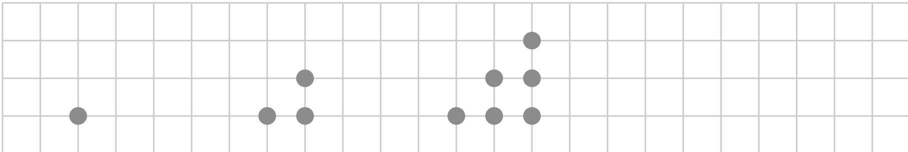
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	...	Name
a)	2	3	5	7	11				...	
b)	1	1	2	3	5				...	

3) Ergänze die Zahlenfolge um jeweils drei weitere Glieder. Gib jeweils das n-te Glied mit Hilfe einer Formel an.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	...	a_n
a)	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$				...	
b)	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{16}$				...	
c)	$\frac{3}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{27}$	$\frac{81}{64}$				...	
d)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$				...	

4) „Arithmetik der Spielsteine“
Die Pythagoräer legten mit Spielsteinen sogenannte figurierte Zahlen. Somit ist diese Arithmetik schon ca. 2500 Jahre alt.

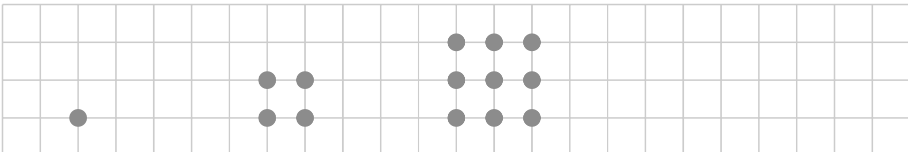
a) Das einfachste Beispiel dazu bilden die sogenannten Dreieckszahlen d_n.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 ...

- Zeichne auch die Figuren 4 und 5.
- Zähle die Spielsteine der einzelnen Figuren und beschreibe die Dreickszahlen durch eine Zahlenfolge, indem du die ersten 5 Glieder angibst.
- Wie lautet das 10. Glied d_{10}? (Aus wie vielen Spielsteinen besteht die 10. Figur?)
- Finde das Bildungsgesetz $d(n)$ für die Dreieckszahlen. (Aus wie vielen Spielsteinen besteht die n-te Figur?)

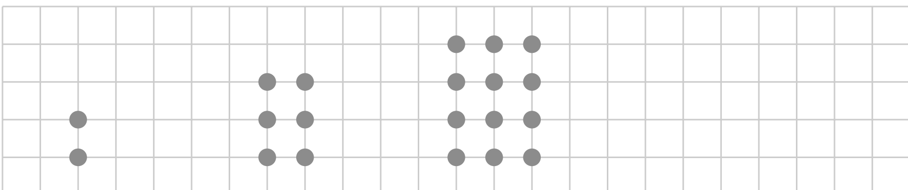
b) Die nachfolgenden Figuren repräsentieren die sogenannten Viereckszahlen v_n.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 ...

- Zeichne auch die Figuren 4 und 5.
- Zähle die Spielsteine der einzelnen Figuren und beschreibe die Viereckszahlen durch eine Zahlenfolge, indem du die ersten 5 Glieder angibst.
- Wie lautet das 10. Glied v_{10}?
- Finde das Bildungsgesetz $v(n)$ für die Viereckszahlen.

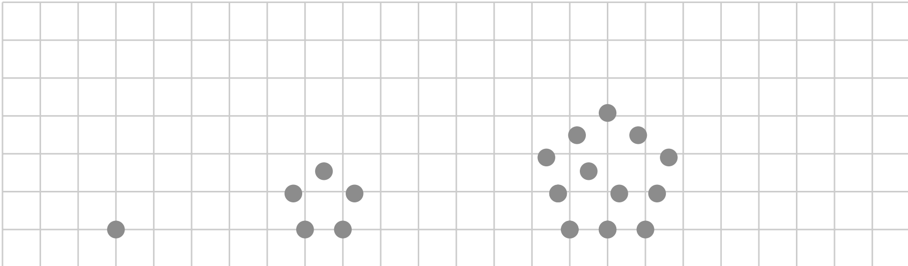
c) Die nachfolgenden Figuren repräsentieren die sogenannten Heteromeken h_n.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 ...

- Zeichne auch die Figuren 4 und 5.
- Zähle die Spielsteine der einzelnen Figuren und beschreibe die Heteromeken durch eine Zahlenfolge, indem du die ersten 5 Glieder angibst.
- Wie lautet das 10. Glied h_{10}?
- Finde das Bildungsgesetz $h(n)$ für die Heteromeken.

d) Die nachfolgenden Figuren repräsentieren die sogenannten Fünfeckszahlen f_n.



Figur 1 Figur 2 Figur 3 ...

- Zeichne auch die Figuren 4 und 5.
- Zähle die Spielsteine der einzelnen Figuren und beschreibe die Fünfeckszahlen durch eine Zahlenfolge, indem du die ersten 5 Glieder angibst.
- Wie lautet das 10. Glied f_{10}?
- Finde das Bildungsgesetz $f(n)$ für die Fünfeckszahlen. Fertige dir dazu eine Tabelle an, in der du dir die Dreieckszahlen, Viereckszahlen und Fünfeckszahlen gegenüberstellst.
  Fällt dir etwas auf?

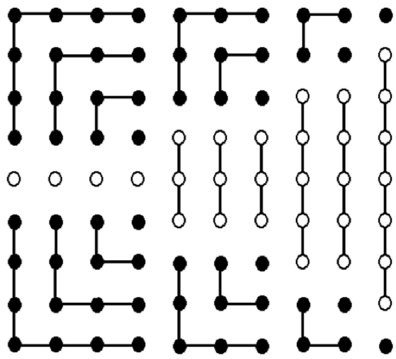
e) Der griechische Mathematiker Diophant (3. Jh. v. u. Z.) fand den folgenden weiteren Zusammenhang zwischen den Dreickszahlen und den Viereckszahlen: $8 \cdot d_n + 1 = v_{2n+1}$. Überprüfe diese Gesetzmäßigkeit für $n = 1, 2, 3, 4$.
Erläutere diesen mit Hilfe einer geometrischen Veranschaulichung.

5) a) Schon die Griechen kannten eine Formel zur Berechnung der Summe der ersten n-Quadratzahlen. So gilt:

$\mathbf{Q(1)} = 1^2 = \mathbf{1}$, $\mathbf{Q(2)} = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = \mathbf{5}$, $\mathbf{Q(3)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = \mathbf{14}$

Finde die Formel zur Berechnung der Summe der ersten n-Quadratzahlen:
$\mathbf{Q(n)} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \ldots$.

Untersuche dazu die nebenstehende Abbildung, welche die Summe der ersten 5 Quadratenzahlen, also $Q(5)$ figuriert darstellt. Wenn du die Gesetzmäßigkeiten der Darstellung erkennst, findest du auch die gesuchte Formel.



b) Finde auch die Formel zur Berechnung der Summe der ersten n-Kubikzahlen:
$\mathbf{K(n)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \ldots$.

Kannst du die Summe der ersten n-Kubikzahlen auch figuriert darstellen?

6) Gegeben seien n Geraden in der Ebene, von denen keine zwei parallel sind und von denen keine drei durch einen Punkt gehen. Untersuche in wie viele Teilgebiete n Geraden eine Ebene zerlegen?

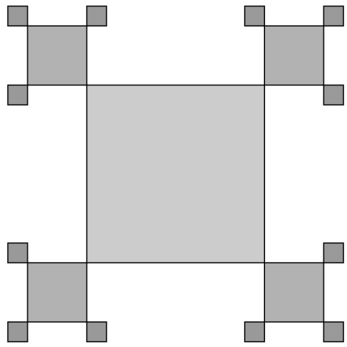
Hinweis: Eine Gerade zerlegt eine Ebene in zwei Teile.

7) (Olympiadeaufgabe 570636)

Ein Quadratfraktal entsteht in einem wiederholten Prozess, den man so beschreiben kann:

a) Beginne mit einem Quadrat mit der Seitenlänge 1. Dies sei die Stufe 0 des Fraktals.

b) In jeder neuen Stufe werden an allen äußeren Ecken des bisherigen Fraktals neue Quadrate angebracht, die jeweils ein Drittel der Seitenlänge der Quadrate der vorigen Stufe haben.



Die Abbildung zeigt das Fraktal in Stufe 2, also nach zweimaligem Anbau von Quadraten an den Ecken.

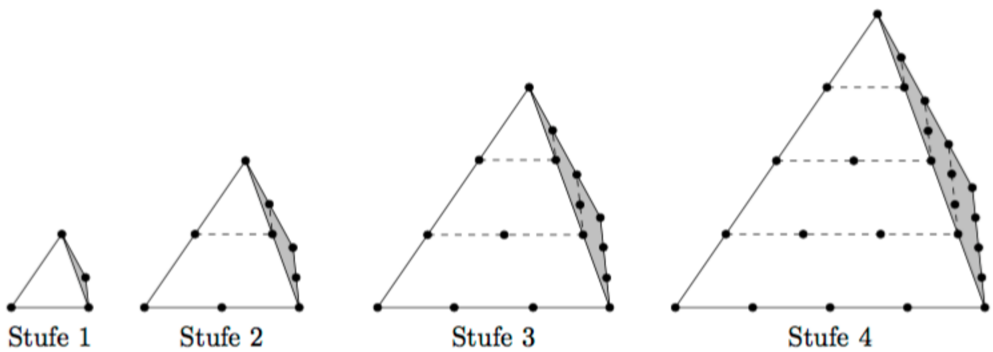
a) Bestimme, wie viele Quadrate jeweils zum Fraktal der Stufe 1, 2, 3, 4 und 5 gehören.

b) Berechne für die Stufen 0 bis 2 jeweils den Gesamtumfang des Fraktals.

c) Berechne für die Stufen 0 bis 2 jeweils den gesamten Flächeninhalt des Fraktals.

8) (Olympiadeaufgabe 540636)

Wir betrachten dreiseitige Pyramiden. Sie wachsen von Stufe zu Stufe und haben an ihren Ecken, auf allen sechs Kanten und auf allen vier Flächen Punkte in regelmäßigen Abständen. Die Abbildung zeigt die Pyramiden der Stufen 1, 2, 3 und 4 in Schrägbildern, bei denen jeweils zwei Flächen und eine Kante verdeckt sind. Auf diesen verdeckten Flächen und Kanten sind Punkte genauso angeordnet wie auf den sichtbaren Flächen und Kanten.



Die Anzahl der Punkte in der n-ten Stufe soll $A(n)$ heißen.

a) Berechne $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$ und $A(4)$.

b) Wie groß ist die Anzahl der Punkte in der nächsten Stufe, das heißt, welchen Wert hat $A(5)$?

c) Ermittle $A(10)$.

d) Ermittle $A(100)$.

9) (Olympiadeaufgabe 530624)

In dieser Aufgabe geht es um eine Ameise, die auf einem Dreiecksgitter, wie es in den Abbildungen gegeben ist, Wege entlangkrabbelt. Im ersten Umlauf umkrabbelt die Ameise ein kleines Dreieck und geht zum Schluss noch eine Seitenlänge geradeaus (siehe Abbildung A 530624 a), so dass sie im ersten Umlauf insgesamt 4 Seitenlängen zurückgelegt hat.

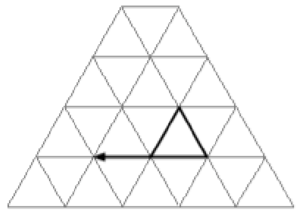


Abbildung A 530624 a

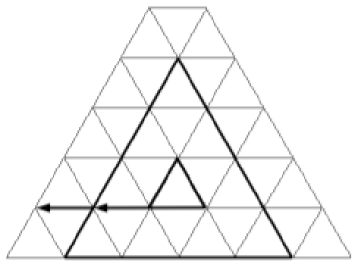


Abbildung A 530624 b

Im zweiten Umlauf umläuft die Ameise ein größeres Dreieck, und zwar wählt sie den kürzesten Weg in Form eines Dreiecks um die bisher umlaufene Figur, der keine der bisher benutzten Kanten verwendet (siehe Abbildung A 530624 b für den Ameisenweg im zweiten Umlauf).
Zum Schluss krabbelt sie wieder eine Seitenlänge nach außen, damit sie ihren nächsten Umlauf beginnen kann.

Auf diese Weise umkrabbelt die Ameise in weiteren Umläufen immer größere Dreiecke.

a) Wie viele Seitenlängen hat die Ameise am Ende des zweiten Umlaufs insgesamt zurückgelegt?

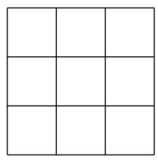
b) Wie viele Seitenlängen legt die Ameise im vierten Umlauf zurück?

c) In welchem Umlauf durchläuft die Ameise ihre insgesamt hundertste Seitenlänge?

d) Untersuche allgemein, wie viele Seitenlängen von Umlauf zu Umlauf hinzukommen. Gib eine allgemeine Formel an, mit der man berechnen kann, wie viele Seitenlängen $u(n)$ die Ameise im n-ten Umlauf zurückgelegt hat. (Eine vollständige Begründung wird nicht erwartet.)
Berechne $u(100)$.

10) (Olympiadeaufgabe 520633)

Clara beginnt mit einem Quadrat, wir nennen dies „die Figur der Stufe 0“, kurz Figur (0). Sie zerlegt dieses Quadrat in neun gleich große Quadrate, dies ist „die Figur der Stufe 1“ oder Figur (1) (siehe nebenstehende Abbildung).



Jetzt sagt sie sich: Ich will nun immer wieder jedes Quadrat, das genau einen Eckpunkt mit dem ursprünglichen Quadrat aus Figur (0) gemeinsam hat, in neun gleich große Teilquadrate zerlegen. Clara zählt jetzt immer alle diejenigen Quadrate, die in ihrem Inneren keine weiteren Quadrate enthalten, und hält diese Anzahl mit dem Namen $A(n)$ fest, wenn sie n Zerlegungsschritte gemacht hat. Bei der Figur (1) zählt sie also 9 Quadrate und erhält $A(1) = 9$.

a) Wie viele Quadrate zählt Clara bei Figur (2)?

b) Was erhält Clara für $A(5)$?

c) Finde eine Vorschrift (oder Formel) für die Anzahl $A(n)$ in der Stufe n für ($n \geq 1$) und begründe sie.

d) Berechne nun $A(10)$.

11) (Olympiadeaufgabe 510636)

Anton hat ein gleichseitiges Dreieck; in Bezug auf die folgenden Veränderungen nennen wir dies Stufe 0.

Er zerlegt es in vier gleich große Dreiecke, wie in der Abbildung A 510636 dargestellt. Damit erhält er die Stufe 1. Nun wird das innerste Dreieck wieder genauso zerlegt; dies ergibt die Stufe 2. In jeder Abbildung A 510636 weiteren Zerlegung wird wiederum nur das innerste Dreieck zerlegt.

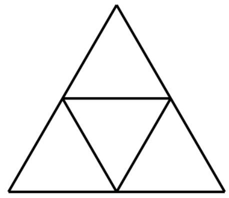


Abbildung A 510636

a) Anton zählt jetzt immer alle diejenigen Dreiecke, die in ihrem Inneren keine weiteren Dreiecke enthalten. Wie viele solche Dreiecke erhält Anton in Stufe 3?
Bezeichne diese Anzahl mit $S(3)$.

b) Finde eine Formel für die Anzahl $S(n)$ solcher Dreiecke in Stufe n.
Berechne mit Hilfe dieser Formel die Anzahl $S(10)$.

Jetzt wird die Zerlegungsvorschrift geändert: In jedem Schritt werden alle die Dreiecke in vier Teildreiecke zerlegt, die ihre Spitze oben haben. Begonnen wird wieder mit dem einfachen Dreieck, der Stufe 0; wiederum ist nach der Anzahl der Dreiecke gefragt, die keine kleineren Dreiecke in sich enthalten.
Wir nennen die jetzt entstehenden Anzahlen $T(n)$.

c) Ermittle die Anzahlen $T(1)$, $T(2)$ und $T(3)$.

d) Berechne die Anzahl $T(6)$.

12) (Olympiadeaufgabe 450633) Erbsen rollen über die Treppe …

Überall auf den Treppenstufen liegen viele Erbsen. Die Treppe hat 14 Stufen. Jede Erbse, die zum ersten Mal über eine Stufe rollt, setzt auf de nächsten Stufe zwei weitere Erbsen in Bewegung. Sie bleibt dann auf der übernächsten Stufe liegen, ohne dort noch einmal Erbsen in Bewegung zu setzen. Oben beginnt das Ganze mit einer rollenden Erbse.

a) Gib an, wie viele Erbsen auf der 1., 2., 3. und 4. Stufe, von oben gezählt, ankommen!

b) Wie viele Erbsen kommen unten an?

c) Wie viele Erbsen würden unten ankommen, wenn die Treppe 20 Stufen hätte?
(Zusatzfrage - ohne Wertung: Kannst du eine allgemeine Formel für eine noch längere Treppe mit n Stufen angeben?)

13) (Olympiadeaufgabe 440635)

a) Ermittle die Gesamtzahl der Gitterpunkte des abgebildeten (4 x 4 x 4) - Würfels!

Bestimme dabei auch die Anzahl der Gitterpunkte auf der Oberfläche und die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des Würfels!

b) Ermittle die entsprechenden Anzahlen der Gitterpunkte für den (5 x 5 x 5) - Würfel!

c) Beschreibe für einen (n x n x n) - Würfel, wie du die Gesamtzahl der Gitterpunkte, die Anzahl der inneren und die der äußeren Gitterpunkte berechnest!

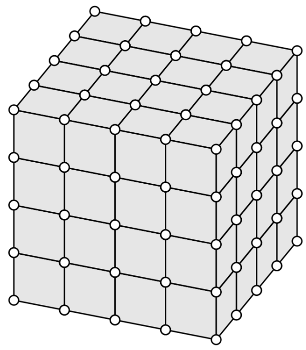


Abbildung A 440635