Name: ______________________________

Gleichungen und Ungleichungen (Modellieren und Lösen)

1. Denke dir eine Zahl, multipliziere sie mit 5, zähle 15 hinzu und nimm von der erhaltenen Zahl den 5. Teil. Von dem Ergebnis subtrahiere die gedachte Zahl. Das Resultat wird in jedem Falle 3 sein. Begründe.

2. Löse folgende Gleichungen (im Bereich der gebrochenen Zahlen).

   a) $3x = 15$ b) $9x = 6$ c) $\frac{1}{3}x = 4$

   d) $\frac{5}{2}x = 15$ e) $2x + 15 = 37$ f) $x + 3x + \frac{3}{2}x = 110$

   g) $\frac{4}{15}x + \frac{2}{5}x + 100 = x$ h) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{3} + 100 = x$ i) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = \frac{x}{2} + 7$

   k) $\frac{1}{3}x + 150 + \frac{1}{4}x = x$ l) $3(x+4) - 12 = 2(x+5)$ m) $x - 6 = 3\left(\frac{2}{3}x - 6\right)$

3. Löse folgende Ungleichungen (im Bereich der gebrochenen Zahlen):

   a) $\frac{3}{x} > 4$ b) $\frac{x}{3} - 2 < \frac{1}{5}$ c) $2x - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$

   d) $2x - 5 + \frac{1}{2}x + 2 - 7 > 3$ e) $\frac{1}{2}(6x-2) < \frac{3}{2}x + \frac{1}{3}x + 3$ f) $\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) < \frac{1}{3}\left(\frac{2x}{5} + 1\right)$

4. Eine Expedition legte am ersten Tag $\frac{2}{5}$ des Weges, am zweiten Tag $\frac{1}{3}$ des Weges und am dritten Tag die restlichen 100 km zurück.

   a) Wie lang war die zurückgelegte Gesamtstrecke?

   b) Welche Strecken wurden an den beiden ersten Tagen zurückgelegt?

5. Um das Jahr 250 n.Chr. wurde in Alexandria der Mathematiker Diophantos geboren. Auf seinem Grabstein ließ er ein Ephigramm einmeißeln, daß in Form eines mathematischen Rätsels sein Alter verrät.

   „Hier dies Grabmal deckt Diophantos. Schauet des Wunder! Durch des Entschlafenen Kunst lehret sein Alter der Stein. Knabe zu sein, gewährt im Gott ein Sechstel des Lebens. Noch ein Zwölfte dazu, sproß auf der Wange der Bart. Dazu ein Siebentel noch, da schloß er den Bund der Ehe. Nach fünf Jahren entsproß der Verbindung ein Sohn. Wehe, das vielgeliebte Kind, die Hälfte der Jahre hat es des Vaters erreicht, als dem Schicksal erlag. Darauf vier Jahre hin durch Betrachtung der Zahlen den Kummer. Von sich scheuchend, kam auch er an das irdische Ziel. “

   Wie alt wurde Diophantos?

6. Wenn man ein Drittel von Rainers Erspartem zu einem Fünftel dieser Ersparnis addiert, dann ist diese Summe um genau 7 € größer als die Hälfte seines Erspartem.

   Wie viele Euro hat Rainer demnach insgesamt gespart?

7. Arnd und Bernd spielen Zahlenraten. Beide denken sich vier Zahlen.
   Arnd sagt:
   - Meine erste Zahl ist um drei größer als das Doppelte der zweiten Zahl.
   - Die dritte Zahl ist so groß wie die beiden ersten zusammen.
   - Die vierte Zahl ist um eins kleiner als das Doppelte der dritten Zahl.
   - Die Summe aus meinen vier Zahlen beträgt 83.

   Nachdem Bernd diese vier Zahlen ermittelt hat, sagt er:
   - Meine Zahlen stimmen mit deinen Zahlen nicht überein. Dennoch haben sie dieselben Eigenschaften, wie deine Zahlen, nur ist ihre Summe kleiner als 83.
   - Ich verrate dir noch, dass meine vierte Zahl bei Division durch vier den Rest eins lässt.

   Nach einigem Überlegen sagt Arnd:
   Deine Angaben reichen nicht aus, um deine vier Zahlen eindeutig zu ermitteln.
   a) Wie lauten die vier Zahlen, die sich Arndt gedacht hat?
   b) Weise nach, dass Arnd mit seiner letzten Aussage recht hat.

8. a) Zerlege die Zahl 48 so in eine Summe von 9 Summanden, dass (mit Ausnahme des ersten Summanden) jeder der Summanden um $\frac{1}{2}$ größer ist als der vorhergehende Summand. Wie lautet der kleinste und wie lautet der größte Summand?
   b) Löse die entsprechende Aufgabe, die entsteht, wenn man die „Zahl 48“ durch die „Zahl 2495“ sowie die „9 Summanden“ durch „100 Summanden“ erstetzt.

9. Arno berichtet: „Ich bin jetzt doppelt so alt wie mein Bruder Bernd zu einem bestimmten früheren Zeitpunkt war. Zu diesem früheren Zeitpunkt war ich genau so alt wie Bernd jetzt ist. Zu einem bestimmten späteren Zeitpunkt wird Bernd genau so alt sein wie ich jetzt bin. Zu diesem späteren Zeitpunkt werden wir beide zusammen genau 63 Jahre alt sein.“

   Weise nach, dass man aus diesen Angaben das gegenwärtige Alter von Arno und von Bernd eindeutig ermitteln kann. Wie alt sind die Brüder?

10. (590734) Für eine ganze Zahl z sind zwei der folgenden Ungleichungen wahr und die anderen drei falsch:

    (1) $2 \cdot z > 130$,

    (2) $z < 200$,

    (3) $3 \cdot z > 50$

    (4) $z > 205$,

    (5) $z > 15$.

    a) Finde die beiden wahren Ungleichungen.
    b) Bestimme die Zahl z.

11. (590731) Zu Zeiten, als das Geld nur in Heller gezählt wurde, bot Raubritter Habegern einem Handwerksburschen folgenden Handel an:

    Überquert dieser eine bestimmte Brücke, so wird das Geld in seiner Börse beim Überqueren verdoppelt. Dafür müsse er danach nur 40 Heller an den Raubritter zahlen.

    Der voreilige Handwerksbursche ging auf den Handel ein. Er überquerte die Brücke, verdoppelte dabei das Geld in seiner Börse und bezahlte aus ihr 40 Heller an den Raubritter. Sofort überquerte der Handwerksbursche die Brücke ein weiteres Mal, bezahlte den Raubritter aus seiner Börse und überquerte die Brücke dann gleich noch einmal. Nachdem er dem Raubritter 40 Heller aus seiner Börse gezahlt hatte, stellte er mit Schrecken fest, dass er kein Geld mehr in seiner Börse hatte.

    Ermittle, wie viel Geld der Handwerksbursche in seiner Börse hatte, bevor er den Raubritter traf.

12. (580736) Stammbrüche sind positive echte Brüche mit dem Zähler 1.

    a) Zeige, dass der Stammbruch $\frac{1}{5}$ sowohl die Summe als auch die Differenz je zweier verschiedener Stammbrüche ist.
    b) Ermittle alle positiven ganzen Zahlen n derart, dass für die Differenz der beiden benachbarten Stammbrüche $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{n+1}$ die Ungleichung $\frac{1}{100} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{20}$ gilt.
    c) Zeige, dass jeder Stammbruch $\frac{1}{n}$ die Summe zweier verschiedener Stammbrüche ist.

13. (570734) Leonie besitzt eine Sammlung einfarbiger roter und blauer Flummis. Die Anzahl der roten Flummis ist kleiner als 20. Die Anzahl der blauen Flummis ist fünfmal so groß wie die der roten Flummis. Sie schenkt ihrem kleinen Bruder einige Flummis, und zwar dreimal so viele blaue wie rote. Leonie hat jetzt noch genau 100 Flummis.

    Begründe, dass sich die Anzahl der roten und die Anzahl der blauen Flummis, die Leonie vor der Schenkung an ihren Bruder hatte, durch diese Angaben eindeutig ermitteln lassen, und gib diese Anzahlen an.

14. (550733) Die Freunde Axel und Bernd wohnen in verschiedenen Orten. Oft treffen sie sich mit dem Fahrrad an einem Platz, zu dem beide von ihren Wohnungen aus eine gleich lange Fahrstrecke zurückzulegen haben. Normalerweise benötigen beide auch dieselbe Zeit, um dorthin zu kommen. Diesmal jedoch fährt Axel bei günstigem Rückenwind mit einer konstanten Geschwindigkeit von 20 Kilometern pro Stunde und ist 3 Minuten vor der vereinbarten Zeit am Treffpunkt. Bernd dagegen kann bei dem Gegenwind nur 16 Kilometer pro Stunde konstant fahren und erreicht den Treffpunkt erst 3 Minuten nach der vereinbarten Zeit.

    Ermittle die Fahrzeiten von Axel und von Bernd zum Treffpunkt sowie die Länge der Fahrstrecke zum Treffpunkt.

15. (530734) Herr Peters ist Mathematiklehrer und hat eine Klassenarbeit schreiben lassen. Er trägt die Ergebnisse in ein Programm ein und kann so den Notendurchschnitt der bisher korrigierten Arbeiten nach jeder eingetragenen Note ablesen. Ein großer Teil der Arbeiten wurde bereits korrigiert und die Noten wurden jeweils sofort eingegeben. Der Notendurchschnitt ist bisher 2,75. Die nächsten vier Arbeiten sind mangelhaft (Note 5). Dadurch erhöht sich der Notendurchschnitt auf 3,2.

    a) Ermittle, wie viele Arbeiten Herr Peters einschließlich dieser vier Arbeiten bisher insgesamt korrigiert hat.
    b) Es müssen noch weitere 8 Arbeiten korrigiert werden. Ziel der Klasse ist, dass der Notendurchschnitt aller Arbeiten nicht größer als 3,0 ist. Berechne, welchen Notendurchschnitt diese acht Arbeiten nicht überschreiten dürfen, damit die Klasse ihr Ziel erreicht.

    Hinweis: Die Arbeiten werden mit den Noten 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 bewertet.

16. (520735) Maik, der Biker, fährt mit seinem Mountainbike von Imtal nach Aufberg. Auf dem ersten Drittel der Gesamtstrecke geht es bergauf, auf dem zweiten Drittel bergab und der Rest der Route verläuft in der Ebene. Bergauf fährt Maik genau 16km/h und in der Ebene fährt er konstant mit 24km/h. Auch bergab fährt er mit konstanter Geschwindigkeit. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit auf der gesamten Strecke beträgt 24 km/h.

    Ermittle, mit welcher Geschwindigkeit Maik bergab fährt.

17. (490735)
    Es sei m die Anzahl aller Möglichkeiten, in der Ungleichung $a < b$ die Variablen a und b durch ganze Zahlen von 0 bis n so zu ersetzen, dass diese Ungleichung dabei stets erfüllt wird.

    a) Ermittle diese Anzahl m für den Fall, dass $n = 20$ gilt.
    b) Bestimme die Zahl n, für die $m = 820$ gilt.
    c) Gib eine begründete Vermutung für eine Formel für m in Abhängigkeit von n an und überprüfe sie an deinem Ergebnis von b).

18. (470731) Frau Hübner hat Katzenfutter eingekauft. Mit fünf Dosen kommt sie normalerweise für ihre zwei Katzen zwei Tage aus. Die größere Katze frisst 50 % mehr als die kleinere.

    Frau Hübner wundert sich: Seit geraumer Zeit braucht sie mehr Futter, nämlich neun Dosen für drei Tage. Wer sind die Gäste, denen das Katzenfutter schmeckt? Ein Igel! Und sogar Krähen verschmähen das Futter nicht.

    Es wird Herbst, und der Igel zieht sich zum Winterschlaf zurück. Frau Hübner kommt jetzt für die Katzen und die Krähen mit elf Dosen vier Tage lang aus. Im Winter verschwinden dann auch die Krähen. Im Frühjahr erwacht der Igel aus dem Winterschlaf und kommt zur Futterstelle. Die kleinere der beiden Katzen ist jedoch verschwunden und auch die Krähen tauchen nicht wieder auf.

    Frau Hübner fährt vierzehn Tage in Urlaub. Die Nachbarin soll Katze und Igel versorgen. Wie viele Dosen mit Katzenfutter muss Frau Hübner der Nachbarin geben?

19. (470734) Tim und Tom sind gute Freunde. Nach dem (in vollen Lebensjahren angegebenen) Alter gefragt, antwortet Tim: „Ich bin jetzt doppelt so alt, wie Tom war, als ich so alt war, wie Tom jetzt ist. Wenn Tom so alt sein wird, wie ich jetzt bin, dann werden wir zusammen 63 Jahre alt sein.“

    Wie alt ist Tim? Wie alt ist Tom? Überprüfe deine Ergebnisse durch eine Probe.

20. (460734) Es ist lange eiskalt gewesen. Der Osterhase hat die Ostereier noch nicht verstecken können. In neun Tagen ist Ostern. „Das schaffe ich nicht! Wenn ich die Ostereier ganz allein verteilen soll, brauche ich vierzehn Tage“, denkt er. Er bittet Lisa, seine Tochter: „Du musst mir helfen!“ – „Aber sicher!“, antwortet sie. „Nur, so viel wie du kann ich nicht tragen. Selbst gemeinsam brauchen wir noch zehn Tage.“ – „Dann muss uns Fridolin helfen“, beschließt Vater Osterhase, „zu dritt schaffen wir die Arbeit in acht Tagen.“ Da mault der Osterhase „Acht Tage schuften, gerade jetzt, da das Wetter endlich schöner wird. Fünf Tage, und keinen Tag länger!“

    a) Ist das Verstecken der Ostereier in neun Tagen zu schaffen, wenn Fridolin nur fünf Tage hilft?
    b) Wie lange müsste Fridolin mitarbeiten, wenn Lisa genauso lange wie ihr Bruder aushelfen wollte?

21. (450734) Die Gemeinden A und B sowie die Stadt C liegen in dieser Reihenfolge an einer Landstraße. Die Gemeinden A und B sind genau 5 km voneinander entfernt. Von B aus fährt ein Traktor morgens um 6 Uhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 10km/h nach C. Am gleichen Tag fährt von A aus ein Radfahrer um 7 Uhr mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 15km/h nach C und überholt den Traktor vor der Stadt C.

    a) Zu welcher Uhrzeit und in welcher Entfernung von B überholt der Radfahrer den Traktor?
    b) Wie viele Kilometer sind B und C voneinander entfernt, wenn der Radfahrer genau 40 Minuten früher in C ankommt als der Traktor?