

Im Rahmen der Organisation der Niedersächsischen Landesrunde der Mathematik-Olympiade existieren zwei Probleme, die sich als ganzzahlige Programme formulieren lassen und durch eine geeignete Implementation mittels Computer effektiver lösen lassen als durch stundenlange Arbeit mit Papier und Bleistift. Dies sind die Erstellung eines zulässigen Sitzplanes für die Klausur, sowie die Verteilung der Jugendherbergszimmer.

Da die Schülerinnen und Schüler¹ der Jahrgangsstufen 5 und 6 bei den Klausuren in gesonderten Räumen sind, gleichzeitig aber Teilnehmer aller Jahrgangsstufen mit einem Anreiseweg von mehr als 50 km in der Jugendherberge übernachten, werden die beiden Probleme gesondert betrachtet.

1 Das Sitzplan-Problem

Für den Sitzplan zur Klausur der Niedersächsischen Landesrunde der Mathematik-Olympiade sollen die Teilnehmer so auf die verfügbaren Klausurplätze verteilt werden, dass keine zwei, die gemeinsame Aufgaben haben, nebeneinander oder schräg voreinander sitzen. Weiterhin sollen keine zwei Teilnehmer derselben Schule nebeneinander sitzen.

Ausgangssituation und Ziel

Vorgegeben sind

- eine Menge $\{h_1, \dots, h_{m_h}\}$ von Klausurräumen, bzw. Hörsälen
- eine Menge $\{s_1, \dots, s_{m_s}\}$ von Teilnehmern
- die genaue Aufteilung jedes Hörsaals, also sein Layout
- für jeden Teilnehmer die entsprechende Jahrgangsstufe und Schule

Die erhoffte Lösung umfasst

- für jeden Teilnehmer den Klausorraum, in dem er schreiben muss
- für jeden Klausorraum einen lesbaren Sitzplan, auf dem jeder Teilnehmer seinen Platz finden kann

Die Teilnehmerdaten und Informationen zu den Klausurräumen werden aus der zentralen MySQL-Datenbank entnommen und in diese zurückgeschrieben, bzw. mittels \LaTeX in gedruckte Pläne geformt. Hier müssen geeignete Schnittstellen zur Übernahme und Rückgabe der Daten bestehen.

¹Wir verwenden den Ausdruck Teilnehmer in geschlechtsneutraler Form, soweit eine Unterscheidung nicht erforderlich ist. Andernfalls wird zwischen Mädchen und Jungen unterschieden.

Implementation

Zur Implementation des Problems gehen wir wie folgt vor. Zunächst werden die Teilnehmer auf die Klausurräume verteilt. Dabei sollen in allen Räumen möglichst alle Klassenstufen entsprechend ihres Anteils an der Gesamtteilnehmerzahl vertreten sein. Insgesamt dürfen natürlich nicht mehr Teilnehmer in den Klausurraum entsandt werden, als dieser Plätze enthält.

Weiterhin erlauben wir nur maximal zwei Teilnehmer derselben Schule in einem Raum. Da jede Schule maximal 8 Schülerinnen und Schüler entsenden darf, sollte es bei 6 Klausurräumen hier nicht zu Engpässen kommen. Indirekt werden die Schulen somit etwas gleichmäßiger auf die Räume verteilt.

Innerhalb der Klausurräume werden die Teilnehmer dann einem Platz zugewiesen.

Die Kombination der gleichmäßigen Verteilungen der Jahrgangsstufen sowie der der Schulen auf die Klausurräume sollte zu einer Vermehrung der zulässigen Sitzpläne jedes einzelnen Raumes beitragen.

Diese Art der Implementation entstand aus praktischen Problemen bei direkten Verfahren. In ersten Versuchen mit 10 Schülerinnen und 16 Plätzen in 1 Klausurraum führte die Zuweisung der Plätze an Jahrgangsstufen und die anschließende Vergabe der Plätze wegen ungünstigen Verteilungen der Jahrgangsstufen in einer Situation zur Unlösbarkeit.

In einer zweiten Modellierung gelang die direkte Zuordnung aller Teilnehmer auf die Sitzplätze im Test mit denselben Schülerinnen und Plätzen problemlos.

Beide Ansätze scheiterten in der Simulation mit den realen Daten der 116 Teilnehmern des Vorjahres und 120 Sitzplätzen jedoch am begrenzten Speicher des eingesetzten 64-Bit Opteron, der nur über 13 Gigabyte Speicher (RAM+Swap) verfügte, welche bereits nach 2 Minuten 44 Sekunden ausgeschöpft waren.

Die Simulation der zuvor beschriebenen und letztlich genutzten Implementation gelang auf demselben Computer in der Rekordzeit von 1 Minute 32 Sekunden. Die tatsächliche Anwendung gelang mit ähnlichem Zeitumfang.

Für diverse Hinweise und Tipps, die sich bei der Entwicklung der Implementation zum Teil als unabdingbar erwiesen, sei an dieser Stelle Frau Prof. Dr. Anita Schöbel, Herrn Michael Schachtebeck, M. Sc. und Marlin Ulmer gedankt.

Die Umsetzung der Versuche, der Simulationen und der endgültigen Anwendungen wurde nur durch die unentbehrliche Hilfe von Herrn Marco Oesting möglich.

Datenerfassung

Die Listen der Teilnehmer und Klausurräume lesen wir aus entsprechenden Daten-Dateien ein, die extern erzeugt werden. Im Anschluss lesen wir das Layout der Klausurräume und die Informationen über die Teilnehmer ein.

Da die Schülerinnen und Schüler eindeutig über ihre Startnummern zu identifizieren sind, erfassen wir die entsprechende Liste als Menge von Ganzzahlen. Die Klausurräume verfügen über eindeutige Bezeichnungen, weshalb diese als Menge von Zeichenketten eingelesen werden. Für jeden Teilnehmer s benötigen wir nun die folgenden Daten:

- seine Jahrgangsstufe² J_s
- seine Schule G_s

²Wir betrachten nur die für die Klausur tatsächlich unterscheidbaren Jahrgangsstufen, falls zwei Klassenstufen eine gemeinsame Aufgabe haben betrachten wir sie als eine gemeinsame Jahrgangsstufe.

Für jeden Klausorraum benötigen wir

- die Zahl seiner Reihen
- die Zahl der Plätze in einer seiner Reihen
- die `id` des Raumes in der Datenbank

Wir lesen diese jeweils in ein mit der Teilnehmerliste bzw. Klausorraumliste indiziertes Array von geeigneten Records ein. Die Records der Teilnehmer umfassen außerdem noch ein Feld für den zugewiesenen Klassenraum.

Teilnehmer auf die Klausurräume aufteilen

Zunächst bestimmen wir die Gesamtzahl \mathcal{S} der Teilnehmer. Wir ermitteln ebenfalls die Zahl σ_j der Teilnehmer je Jahrgangsstufe $j \in \{J_1, \dots, J_k\}$ und den Anteil $a_j = \sigma_j / \mathcal{S}$ der Jahrgangsstufe an der Gesamtzahl.

Daneben haben wir die Zahl \mathcal{P}_r der Sitzplätze für jeden Hörsaal r .

Weiterhin führen wir die Zuordnungsvariablen $\Gamma_{s,r}$ für jeden Teilnehmer s und Raum r ein.

Wir kommen nun zur Formulierung des Problems:

- jeder Teilnehmer in genau einen Raum

$$\forall s: \sum_r \Gamma_{s,r} = 1$$

- in jeden Raum nur so viele Teilnehmer wie Sitzplätze vorhanden sind

$$\forall r: \sum_s \Gamma_{s,r} \leq \mathcal{P}_r$$

- in jedem Raum nur max. 2 Teilnehmer derselben Schule g

$$\forall r, g: \sum_{s: G_s=g} \Gamma_{s,r} \leq 2$$

- nur die anteilige Teilnehmerzahl je Jahrgangsstufe

$$\forall r, j: \sum_{s: J_s=j} \Gamma_{s,r} \leq \lceil a_j \cdot \mathcal{P}_r \rceil$$

Für obiges Problem suchen wir nun eine beliebige zulässige Lösung, und speichern anschließend für jeden Teilnehmer s den zugewiesenen Klausorraum K_s .

Teilnehmer auf Plätze setzen

Wir benötigen die folgenden (globalen) Daten:

- für zwei Teilnehmer s_1, s_2 eine Zahl $G_{s_1, s_2} = 0$, falls sie nebeneinander sitzen dürfen, bzw. $G_{s_1, s_2} = 1$ sonst,
- für jeden Hörsaal h die Menge \mathcal{S}_h derjenigen Teilnehmer, die in diesem Raum sitzen sollen.

Im Folgenden müssen wir in jedem Klausorraum eine zulässige Sitzordnung erstellen. Hierzu fixieren wir zunächst einen Hörsaal h und die zugehörige Teilnehmermenge S_h und lösen das Sitzplan-Problem für diesen. Die Implementation lassen wir dann für jeden Raum anwenden. Wir definieren eine Konfliktmatrix A für (in unserem Sinne) benachbarte Sitzplätze

$$A_{(r_1,p_1),(r_2,p_2)} = \begin{cases} 1 & r_1 \in \{r_2, r_2 \pm 1\} \text{ und } p_1 = p_2 \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir definieren Entscheidungsvariablen $\Omega_{s,(r,p)}$ für alle Teilnehmer s , Reihen r und Plätze p mit

$$\Omega_{s,(r,p)} = \begin{cases} 1 & \text{Schülerin } s \text{ in Reihe } r \text{ auf Platz } p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dabei sollen folgende Bedingungen gelten:

- jeder Teilnehmer auf genau einen Platz

$$\forall s: \sum_{r,p} \Omega_{s,(r,p)} = 1$$

- auf jeden Platz maximal ein Teilnehmer

$$\forall (r, p): \sum_s \Omega_{s,(r,p)} \leq 1$$

Zusätzlich zu den bereits angegebenen Daten haben wir noch Informationen über besondere Sitzplätze, die für die Aufsicht reserviert sind oder wegen eines Schornsteines gar nicht existieren. Für solche Plätze (r', p') setzen wir $\sum_s \Omega_{s,(r',p')} = 0$.

- nur konfliktfreie Teilnehmer auf benachbarte Plätze

$$\forall s_1, s_2, (r_1, p_1), (r_2, p_2): G_{s_1,s_2} + \Omega_{s_1,(r_1,p_1)} + \Omega_{s_2,(r_2,p_2)} + A_{(r_1,p_1),(r_2,p_2)} \leq 3$$

Auch hier suchen wir wieder eine beliebige zulässige Lösung. Das Verfahren wiederholen wir für alle Räume.

Ergebnisausgabe

Die Ausgabe besteht aus zwei Teilen.

Zunächst benötigen wir für jeden Teilnehmer den Klausorraum in der Datenbank. Wir geben hierzu die MySQL-Statements³ in der Form

```
UPDATE tn_tab SET klraum=id WHERE jahr=2008 AND teilnehmer=s;
```

aus. Dabei müssen **id** und **s** natürlich dynamisch angepasst werden.

Desweiteren geben wir den eigentlichen Sitzplan als L^AT_EX-Tabelle aus. Wir beschränken uns dabei auf die Zeilen der Tabelle, ohne Formatierungen o.Ä. Dies muss ggf. von Hand angepasst werden.

Eine Zeile hat dann beispielsweise die Form

```
R & s1 & s2 & & s4 \\\
```

Wobei **R** die Nummer der Zeile angibt, die evtl. auch auf der rechten Seite der Zeile stehen kann. Natürlich werden **s**₁, **s**₂, **s**₄ durch die entsprechenden Teilnehmer ersetzt und eine Leerstelle kann an beliebiger vorgegebener Stelle stehen.

³Aus Sicherheitsgründen weichen wir hier grundsätzlich von der realen Nomenklatur ab.

Bewertung

Das Problem ist sicher nicht bei jeder beliebigen Menge von Teilnehmern lösbar. Besonders in kleinen Klausurräumen mit ungünstigem Layout könnte es zu Problemen kommen. Da die gleichmäßige Verteilung der Jahrgangsstufen bzw. Schulen auf die Räume dies aber relativiert, scheint es in der Praxis nicht zu Problemen zu kommen.

2 Schlaf-Probleme

Bei der Zuweisung der Jugendherbergsräume ist nicht mehr einzig eine mögliche Lösung von Interesse. Diese soll möglichst viele Freundschaften berücksichtigen und zu große Altersdifferenzen in einem einzigen Zimmer vermeiden. Primäre Voraussetzung ist natürlich die strikte Trennung der Jungen und Mädchen.

Ausgangssituation und Ziel

Vorgegeben sind

- eine Menge $\{h_1, \dots, h_{m_h}\}$ von Herbergsräumen
- eine Menge $\{s_1, \dots, s_{m_s}\}$ von Teilnehmern
- die Zahl der Betten jedes Raumes
- für jeden Teilnehmer die Jahrgangsstufe zu der er gehört, sowie seine Schule und das Geschlecht
- Paare von Freunden, die in demselben Zimmer übernachten möchten

Die erhoffte Lösung besteht aus

- einer Zuordnung der Schülerinnen und Schüler zu den Herbergsräumen, die jedem Teilnehmer ein Bett sichert und möglichst viele Wünsche erfüllt.

Implementation

Für dieses Problem ist eine Unterscheidung in Mädchen und Jungen dringend erforderlich, da keine gemischten Zimmer erlaubt sind. Im ersten Schritt wird darum jedem Zimmer ein Geschlecht zugewiesen, sodass die für Jungen bzw. Mädchen vorgesehenen Zimmer jeweils genau die richtige Gesamtzahl Betten umfassen.

Im zweiten Schritt bestimmen wir die Verteilung der Teilnehmer auf die Räume. Die Betten-schlacht verbleibt als leichte Übungsaufgabe.

Auch für dieses Problem waren Hinweise und Tipps von Frau Prof. Dr. Anita Schöbel und Herrn Marco Oesting unentbehrlich. Für die manuelle Verifizierung und Validierung der Lösungen sei Frau Sabrina Kombrink herzlich gedankt.

Datenerfassung

Wir lesen die Mengen der Teilnehmer und der Herbergsräume aus gegebenen Daten ein. Die Schülerinnen und Schüler werden wiederum anhand ihrer Startnummer unterschieden, wenngleich diese keine praktische Bedeutung für das Problem hat. Die Räume sind durch ihre Nummer ebenfalls eindeutig bestimmt.

Danach lesen wir für jeden Teilnehmer s einen Datensatz ein, der sein Geschlecht p_s , ihre Schule g_s und ihre Jahrgangsstufe j_s enthält, sowie für jeden Herbergsraum r einen Datensatz, der seine Bettenzahl b_r und seine Etage e_r enthält.

Aus den eingelesenen Daten ermitteln wir die Menge G der Schulen, sowie die Gesamtzahlen \mathfrak{w} der Mädchen und \mathfrak{m} der Jungen.

Geschlechtertrennung

Wir führen für jeden Raum r eine Entscheidungsvariable M_r ein mit

$$M_r = \begin{cases} 1 & \text{in Raum } r \text{ schlafen Mädchen} \\ 0 & \text{sonst, d. h. in Raum } r \text{ schlafen Jungen} \end{cases}$$

Weiter führen wir für je zwei Räume r_1 und r_2 eine Etagenvariable w_{r_1, r_2} ein, mit

$$w_{r_1, r_2} = \begin{cases} 0 & \text{Raum } r_1 \text{ und Raum } r_2 \text{ sind auf derselben Etage, d. h. } e_{r_1} = e_{r_2} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Natürlich wollen wir nur so viele Betten für Mädchen bzw. Jungen reservieren, wie auch solche in der DJH übernachten:

$$\sum_r M_r \cdot b_r \leq \mathfrak{w} \quad , \quad \sum_r (1 - M_r) \cdot b_r \leq \mathfrak{m}$$

Als Zielfunktion wollen wir die Zimmer für die Mädchen⁴ auf möglichst wenige Etagen verteilen.

$$\min \sum_{r_1, r_2} w_{r_1, r_2} \cdot (M_{r_1} + M_{r_2})$$

Das Ergebnis der Optimierung speichern wir, indem wir den Datensatz eines Raumes r um sein Geschlecht p_r erweitern.

Teilnehmer auf die Räume verteilen

Um den Teilnehmern Schlafplätze bereitzustellen, definieren wir zunächst für jeden Teilnehmer s und jeden Raum r eine Entscheidungsvariable $\Omega_{s, r}$ mit

$$\Omega_{s, r} = \begin{cases} 1 & \text{Teilnehmer } s \text{ schläft in Raum } r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die erste und wichtigste Bedingung dient der Geschlechtertrennung⁵:

$$\Omega_{s, r} = 0 \quad \text{falls} \quad p_s \neq p_r$$

Natürlich soll jeder Teilnehmer s genau ein Bett erhalten:

$$\sum_r \Omega_{s, r} = 1$$

⁴Bei einer natürlichen, also nicht bewusst gesteuerten, Frauenquote von ca. $1/3$ liegt die Wahl nahe.

⁵Die Bezeichnung p_s für das Geschlecht eines Teilnehmers s sollte nicht zu Verwirrung führen.

Selbstverständlich soll jeder Teilnehmer ein eigenes Bett haben. Für jeden Raum r muss also gelten

$$\sum_s \Omega_{s,r} \leq b_r$$

Da die Teilnehmer, die einen Herbergsraum teilen, keine zu großen Altersunterschiede haben sollen, definieren wir für je zwei Teilnehmer s_1 und s_2 Variablen a_{s_1,s_2} mit

$$a_{s_1,s_2} = \begin{cases} 1 & |j_{s_1} - j_{s_2}| > 2, \text{ d. h. der Altersunterschied ist zu groß} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und fordern als Bedingung für alle Teilnehmer s_1 und s_2 und Räume r

$$a_{s_1,s_2} \cdot (\Omega_{s_1,r} + \Omega_{s_2,r}) \leq 1.$$

Wir lesen weiterhin die Freundschaftsbeziehungen als schwachbesetzte Matrix mit Einträgen $f_{s_1,s_2} = 1$ für zwei befreundete Teilnehmer s_1 und s_2 ein und stellen als Bedingung:

$$\Omega_{s_1,r} = \Omega_{s_2,r} \text{ für alle } r, \text{ falls } f_{s_1,s_2} = 1$$

Als letzten Sonderfall soll ausgeschlossen werden, dass alle Personen in einem Raum mit genau einer Ausnahme von derselben Schule sind. Hierfür führen wir für jede Schule g und jeden Raum r Hilfsvariablen $h_{g,r}$ ein, mit

$$h_{g,r} = \begin{cases} 1 & \text{Schule } g \text{ belegt Raum } r \text{ komplett} \\ 0 & \text{in Raum } r \text{ sind mindestens 2 Personen nicht von Schule } g \end{cases}$$

Die Nebenbedingungen lauten dann für jede Schule g und jeden Raum r mit⁶ $b_r \neq 2$

$$\left(\sum_{s: g_s=g} \Omega_{s,r} \right) - b_r + 2 \leq h_{g,r} \cdot b_r$$

und

$$b_r - \left(\sum_{s: g_s=g} \Omega_{s,r} \right) \leq (1 - h_{g,r}) \cdot b_r$$

Wegen $h_{g,r} \in \{0, 1\}$ ist jeweils genau eine der beiden Bedingungen leer. Die obere lässt nur $b_r - 2$ Teilnehmer von Schule g zu, während die zweite mindestens eine Vollbelegung durch Schule g fordert.

Das eigentliche Problem ist eine derartige Verteilung der Schülerinnen und Schüler, bei der Teilnehmer derselben Schule in demselben Raum schlafen, also jede Schule auf möglichst wenige Räume verteilt ist.

Wir führen dazu neue Entscheidungsvariablen $\Gamma_{g,r}$ für jede Schule g und jeden Raum r ein, mit

$$\Gamma_{g,r} = \begin{cases} 1 & \text{in Raum } r \text{ schlafen Teilnehmer von Schule } g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für jeden Teilnehmer s und jeden Raum r muss also gelten

$$\Gamma_{g_s,r} \geq \Omega_{s,r}.$$

⁶in Räumen mit 2 Betten würde die Bedingung gar keine Teilnehmer erlauben

Die Zielfunktion ist die Minimierung der durch die Schulen belegten Räume, also

$$\min \sum_{g,r} \Gamma_{g,r} .$$

Ergebnisausgabe

Die Ausgabe besteht wieder aus zwei Teilen. Zunächst werden die Geschlechtszuordnungen der Räume als MySQL-Querys ausgegeben, dann folgen die Querys für die Teilnehmer.

```
UPDATE juhe SET raumgeschl=pr WHERE raum=r;
```

```
UPDATE tn_tab SET jhraum=r WHERE jahr=2008 AND teilnehmer=s;
```

Dabei müssen p_r , r und s natürlich angepasst werden.

Bewertung

Selbstverständlich können wir auch bei diesem Problem nicht sicherstellen, dass es lösbar ist. Simulationen mit Vorjahresdaten haben innerhalb weniger Minuten brauchbare Ergebnisse geliefert. Die Bedingungen über die Altersunterschiede ließen sich nicht verstärken. Selbst wenn nur für Schülerinnen verschiedener Schulen eine Begrenzung auf einen Unterschied von einer Jahrgangsstufe gefordert wurde, kam es zu Unlösbarkeit. Der ausgegebene Schlafplan enthält unter Umständen einzelne Kombinationen, die ein Organisator von Hand nicht gewählt hätte.

Die Ergebnisse mit den echten Daten von 2008 waren jedoch voll akzeptabel. Im Jahr 2009 war das Problem in der beschriebenen Form unlösbar. Durch eine sehr geringe Teilnehmerzahl von 8 Personen in Klasse 10, von denen genau die 6 männlichen in der Jugendherberge übernachteten, gab es keine zulässige Verteilung der Mädchen der Oberstufe. Dies wurde durch eine Aufweichung der Beschränkung des Altersunterschiedes wegen der Kürze der Zeit überwunden, ergab aber keine voll überzeugende Zimmerverteilung.

3 Fazit

Die Implementation des Sitzplanes ist anscheinend gelungen. Im Verlauf des Wettbewerbs konnten keine Unregelmäßigkeiten erkannt werden. Die Zimmereinteilung verlief zumindest in vielen Fällen erfolgreich. Damit reduziert sich der direkte organisatorische Aufwand für ca. zwei Organisatoren am Vorabend der Landesrunde um einige Stunden.

Die insgesamt durch verschiedene Mathematiker auf die Entwicklung dieser Lösungen verwandte Zeit sollte somit nach Ablauf eines guten Jahrzehntes⁷ ausgeglichen sein.

⁷sofern die Implementation in jedem Jahr unverändert angewandt werden könnte